

Krzysztof Mostowski



Spodnie Talesa

Jak już informowałem w notce „*Pitagoras tańczy na ekranie*”¹⁾, istnieją proste dowody twierdzenia Pitagorasa polegające na przekształceniach pól, wykorzystujące wzór na pole prostokąta i równoległoboku. Takie uzasadnienia można spotkać coraz częściej w nowych podręcznikach. W szkolnej tradycji (zwłaszcza w szkołach średnich) preferowane są dowody, które używają proporcji pomiędzy bokami trójkątów prostokątnych. Takie argumentacje są zwykle oparte na cechach podobieństwa trójkątów i są dla uczniów znacznie trudniejsze.

Proponuję „dynamiczny” dowód twierdzenia Talesa wprowadzający do szkoły – obok popularnych już chyba „majteczek” Pitagorasa – „spodnie” Talesa. Prawdopodobnie Tales nie nosił spodni, tylko chiton – coś w rodzaju długiej koszuli bez rękawów. Szkoła często nazbyt gorliwie kultywuje tradycję, czy wobec tego ubranie Talesa w spodnie ma szansę powodzenia? Spróbujmy.

W polskich podręcznikach cechy podobieństwa trójkątów zwykle wiąże się z twierdzeniem Talesa o proporcjach, które można napisać, gdy ramiona kąta przecniemy dwiema prostymi równoległymi. Warto tu przypomnieć, że w innych krajach twierdzeniem Talesa nazywa się fakt, że kąt oparty na średnicy jest kątem prostym. W polskich podręcznikach zwykle nie dowodzi się twierdzenia Talesa. Jeżeli podawane są jakieś uzasadnienia, to zwykle mają one charakter pól empiryczny – doświadczalny²⁾. Dlatego, zgodnie z tą szkolną praktyką, lepiej chyba mówić nie o twierdzeniu lecz o **Zasadzie Talesa**.

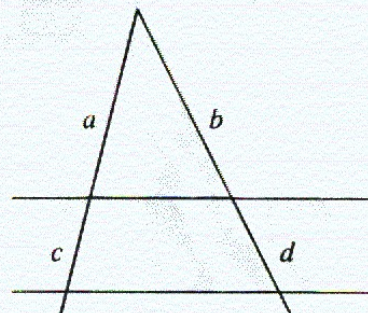
Już starożytni Grecy często stosowali proporcje jako narzędzie algorytmiczne. Nasze współczesne rozumienie proporcji to najczęściej równość

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

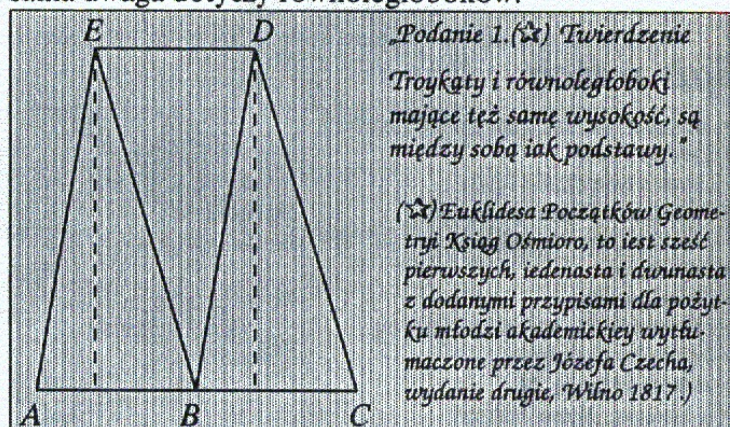
skąd od razu piszemy

$$a \cdot d = b \cdot c$$

i dalej stosujemy przekształcenia algebraiczne. Stosujemy, bo znamy język algebry.



Ale jak widać z *Elementów Euklidesa*, Grecy stosowali inny język. Zasada Talesa wyprowadzona jest tam z faktów dotyczących pól trójkątów, gdy rozważamy „trójkąty równokątne”. Euklides na początku książki VI podaje uwagę, że *jeżeli trójkąty mają te same wysokości, to ich pola są w takim stosunku, jak ich podstawy*. Taka sama uwaga dotyczy równoległoboków.



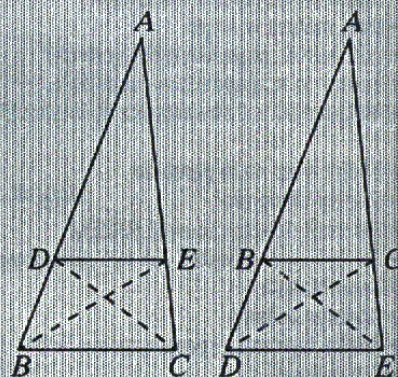
Podanie 1. (☆) Twierdzenie

Trójkąty i równoległoboki mające tę samą wysokość, są między sobą jak podstawy.”

(☆) Euklidesa *Początków Geometrii Ksiąg Ośmiornu*, to jest sześć pierwszych, jedenasta i dwunasta z dodanymi przypisami dla użytku młodzi akademickiej wytymaczone przez Józefa Czecha, wydanie drugie, Włno 1817.)

Podanie 2. Twierdzenie

Jeżeli w trójkącie poprowadzona będzie linia prosta równoległa do jednego z boków jego, ta przecnie pozostałe boki trójkąta, lub boki przedłużone, proporcjonalnie. I jeżeli boki trójkąta, lub boki przedłużone przecięte są proporcjonalnie, linia prosta łącząca punkta przecięcia, będzie do pozostałego boku trójkąta równoległa.”



Przytoczę jeszcze początek dowodu

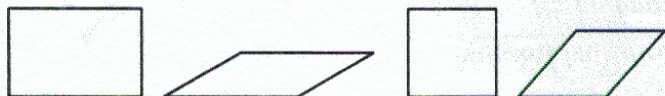
W trójkącie ABC, do jednego z boków BC, poprowadźmy równoległą DE; powiadam, że iak się ma BD do DA, tak się ma CE do EA. Poprowadźmy albowiem linie proste BE, CD, trójkąt więc BDE, jest równy trójkątowi CDE (I.37.), są bowiem na teyże samey podstawie DE, i między temiż samymi równoległymi DE, BC: jest zaś inny trójkąt ADE: równe zaś wielkości do teyże samey wielkości mają tenże sam stosunek (V.7.); więc iak trójkąt BDE, do trójkąta ADE, tak jest trójkąt CDE, do trójkąta ADE, lecz iak trójkąt BDE, do trójkąta ADE, tak jest BD, do DA (VI.1.), bo mając teyż samę wysokość, to jest prostopadłą z punktu E do AB wprowadzoną, są między sobą iak podstawy, i dla tey samey przyczyny iak trójkąt CDE, do trójkąta ADE, tak CE do EA, iak się więc ma BD do DA, tak się ma CE do EA (V.11.)

To jest właśnie to sedno sprawy:

„... są bowiem na teyże samey podstawie DE, i między temiż samymi równoległymi ...”

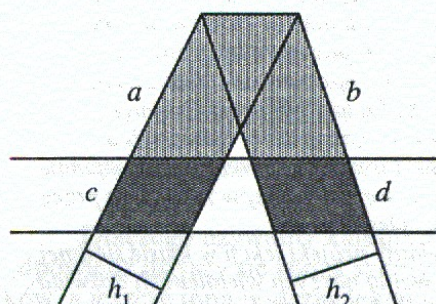
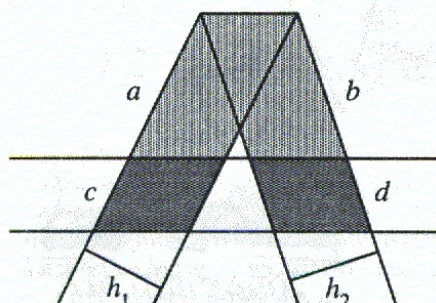
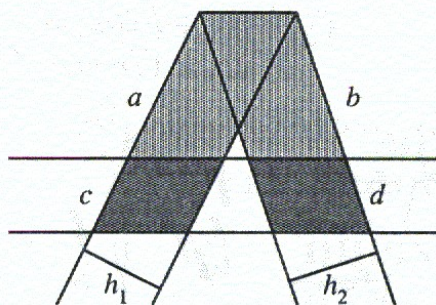
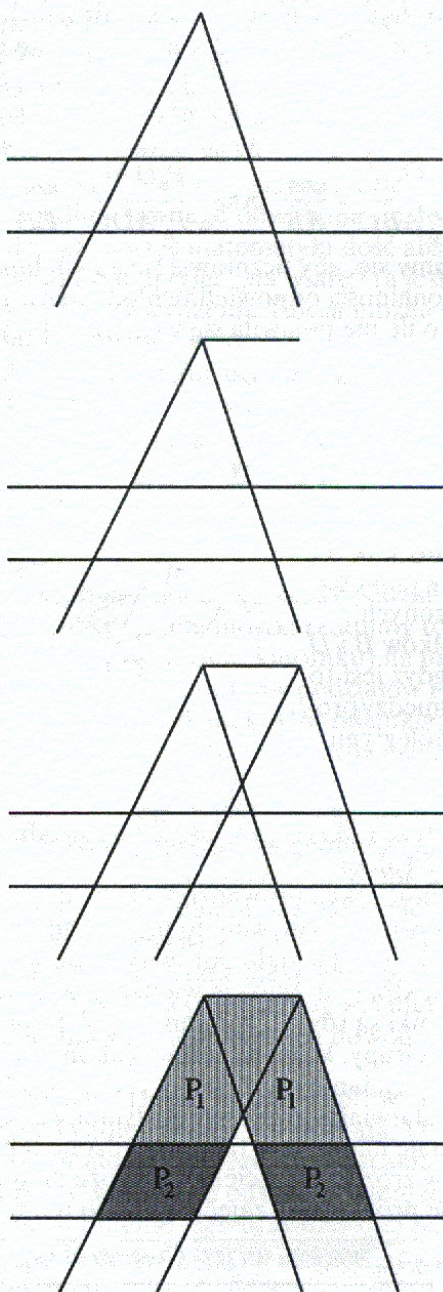
Z doświadczenia wiem, że ten ładny dowód (oczywiście we współczesnym języku wypowiedziany) jest w warunkach szkolnych trudny do zapamiętania dla uczniów. Dużo łatwiejszy dowód otrzymujemy, gdy zamiast trójkątów rozważamy równoległoboki.

Euklides wolał argumentować poprzez trójkąty. Łatwo się domyśleć dlaczego. Trójkąt jest figurą sztywną, „nie składa się”, gdy zbuduje się go ze sztywnych patyczków. Równoległobok nie ma tej własności. Kwadrat ze „sztywnych patyczków” łatwo składa się w romb.



Grecy nie lubili ruchu w geometrii i chyba dlatego Euklides wybrał trójkąty.

Chyba znacznie lepszy przekaz idei dowodu Euklidesa można uzyskać za pomocą serii rysunków:



Z równości pól wynika, że:

$$a \cdot h_1 = b \cdot h_2$$

$$c \cdot h_1 = d \cdot h_2$$

$$\frac{a \cdot h_1}{c \cdot h_1} = \frac{b \cdot h_2}{d \cdot h_2}$$

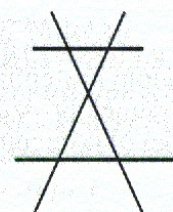
$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

lub

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Ta seria rysunków to kolejne kadry „niemego filmu”, który może zaprezentować nauczyciel wykorzystując np. grafoskop. Uczniowie niech starają się ten film „udźwiękować”, komentując poszczególne etapy. Warto zachęcić ich do samodzielnej produkcji podobnej serii rysunków prowadzącej do innego fasonu spodni Talesa.

Warto też w końcu zapytać, czy ten sposób dowodzenia można powtórzyć, gdy rozpoczniemy od przedstawionej obok sytuacji:

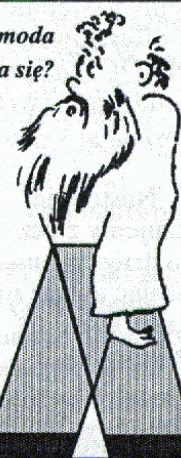


Zachęcam do wypróbowania tego dowodu w klasie. □

1) Krzysztof Mostowski,
„Pitagoras tańczy na ekranie”, NiM 3, str. 15

2) Z. Krygowska,
S. Kulczycki,
S. Straszewicz,
„Nauczanie Geometrii
w klasach licealnych
szkoły ogólnokształcą-
cej”, PZWS, Warszawa
1954, str. 226, 280

Czy ta moda
utrzyma się?



Krzysztof Mostowski, asystent w IM WSRP w Siedlcach

